第 22 卷 第 3 期 2006 年 7 月 | 福建师范大学学报 (自然科学版) Journal of Fujian Normal University (Natural Science Edition) | Vol. 22 No. 3 Jul. 2006

文章编号: 1000-5277(2006)03-0010-05

# 二次特征值反问题的中心斜对称解及其最佳逼近

梁俊平[1], 卢琳璋[2]
(1. 龙岩学院数学与计算机科学学院, 福建 龙岩, 364000; 2. 厦门大学数学科学学院, 福建 厦门, 361005)

摘要: 利用矩阵的奇异值分解, 讨论构造 $n$ 阶中心斜对称矩阵 $M$, $C$ 和 $K$, 使得二次束 $Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K$ 具有给定特征值和特征向量的特征值反问题. 首先证明反问题是可解的, 并给出了解集 $S_{MCK}$ 的通式. 然后考虑从解集 $S_{MCK}$ 中求给定矩阵 $[\tilde{M}, \tilde{C}, \tilde{K}]$ 的最佳逼近问题, 给出了最佳逼近解的存在唯一性及表达式.

关键词: 二次特征值; 中心斜对称矩阵; 最佳逼近; 奇异值分解

中图分类号: O241.2 文献标识码: A

# The Centroskew Symmetric Solution of the Inverse Quadratic Eigenvalue Problem and Its Optimal Approximation

**LIANG Jun-ping**[1], **LU Lin-zhang**[2]
(1. *The College of Mathematics and Computer Science, Longyan University, Longyan* 364000, *China*;
2. *School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen* 361005, *China*)

**Abstract**: The inverse eigenvalue problem of constructing centroskew symmetric matrices $M$, $C$, and $K$ of size $n$ for the quadratic pencil $Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K$ so that $Q(\lambda)$ has a prescribed subset of eigenvalues and eigenvectors is considered by singular value decomposition of matrix. It is shown that the problem is solvable and the general expression of solution to the problem is provided. The optimal approximation problem associated with $S_{MCK}$ is posed, that is: to find the nearest triple matrix $[\tilde{M}, \tilde{C}, \tilde{K}]$ from $S_{MCK}$. The existence and uniqueness of the optimal approximation problem is discussed and the expression is provided for the optimal approximation problem.

**Key words**: quadratic eigenvalue problem; centroskew symmetric matrix; optimal approximation; singular value decomposition

## 1 问题的提出

考虑由下面的二阶线性常微分方程所描述的系统

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0,$$

其中 $M, C, K \in R^{n\times n}$ 为常数矩阵, $x$ 为 $n$ 维向量, $\ddot{x}, \dot{x}$ 的分量分别是 $x$ 的对应分量对时间 $t$ 的二阶和一阶导数. 该系统的稳定性问题往往转化为如下二次特征值问题: 给定 $n$ 阶实矩阵 $M$, $C$ 和 $K$, 求数 $\lambda$ 和非零向量 $x$ 使得

$$Q(\lambda)x = 0,$$

其中 $Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K$ 称为二次束. 数 $\lambda$ 和相应的非零向量 $x$ 分别称为二次束 $Q(\lambda)$ 的特征值和特征向量.

在工程技术, 特别是结构动力模型修正技术领域经常遇到上述二次特征值问题的相反问题(称之为

收稿日期: 2005-04-07
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10571146)
作者简介: 梁俊平 (1969- ), 男, 福建上杭人, 副教授, 硕士.

二次特征值的反问题). 对阻尼结构进行动力分析时, 应用有限元方法可得到系统的质量矩阵 $\tilde{M}$, 阻尼矩阵 $\tilde{C}$ 和刚度矩阵 $\tilde{K}$, 从而可得二次特征值问题和特征向量(振型). 但是有限元模型毕竟是实际结构系统的离散化, 并且在离散化过程中还必须对结构部件之间的连接条件、边界条件作力学上的简化. 因此用有限元方法模型作响应分析时往往存在误差. 另一方面, 运用实测技术可测得结构的低阶(比如 $m(m \leq n)$ 个) 频率(即特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$) 和相应的振型(即特征向量 $x_1, \cdots, x_m$). 一般地, 有限元方法的计算结果与实测结果之间存在差异. 结构动力模型修正技术[1] 利用实测模态数据对有限元方法所得的质量矩阵 $\tilde{M}$, 阻尼矩阵 $\tilde{C}$ 和刚度矩阵 $\tilde{K}$ 进行修正, 使修正的质量矩阵 $M$, 阻尼矩阵 $C$ 和刚度矩阵 $K$ 满足理论上的谱约束条件, 即

$$(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K) x_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, m),$$

并且矩阵 $[M, C, K]$ "接近"矩阵 $[\tilde{M}, \tilde{C}, \tilde{K}]$.

设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$, 如果

$$a_{ij} = - a_{n+1-i, n+1-j}, \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

则称 $A$ 为 $n$ 阶中心斜对称矩阵[2]. 在信息论、线性系统理论、线性估计理论及数值分析等领域中, 经常用到中心斜对称矩阵. $n$ 阶中心斜对称矩阵的全体将记为 $ACSR^{n\times n}$.

$R^{n\times m}$ 表示所有 $n\times m$ 阶实对称阵集合, $R_r^{n\times m}$ 表示 $R^{n\times m}$ 中秩为 $r$ 的子集, $A^+$ 表示 $A$ 的 Moore-Penrose 广义逆, $I_k$ 表示 $k$ 阶单位阵, $S_k = (e_k, e_{k-1}, \cdots, e_1) \in R^{k\times k}$, 其中 $e_i$ 为单位阵 $I_k$ 的第 $i$ 列, $OR^{n\times n}$ 为 $n$ 阶正交矩阵的全体. 设 $A, B \in R^{n\times m}$, $A$ 与 $B$ 的内积定义为 $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A)$, 则由此内积导出的范数 $\| A \| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = (\mathrm{tr}(A^T A))^{\frac{1}{2}}$ 是矩阵 $A$ 的 Frobenius 范数, 并且 $R^{n\times m}$ 在此内积下构成一个完备的内积空间.

对中心斜对称矩阵的最小二乘解问题已有研究[3-4]. 本文将讨论构造二次特征值反问题的中心斜对称解的问题. 中心斜对称的动力模型修正问题可表述为如下二次特征值反问题:

问题 Ⅰ　给定 $X \in R^{n\times m}, \Lambda \in R^{m\times m}$, 求矩阵 $M, C, K \in ACSR^{n\times n}$, 使得

$$MX\Lambda^2 + CX\Lambda + KX = 0.$$

问题 Ⅱ　给定 $\tilde{M}, \tilde{C}, \tilde{K} \in R^{n\times n}$, 求 $[\hat{M}, \hat{C}, \hat{K}] \in S_{MCK}$, 使得

$$\| [\tilde{M}, \tilde{C}, \tilde{K}] - [\hat{M}, \hat{C}, \hat{K}] \| = \inf_{\forall [M, C, K] \in S_{MCK}} \| [\tilde{M}, \tilde{C}, \tilde{K}] - [M, C, K] \|.$$

其中 $S_{MCK} = \{[M, C, K] \mid MX\Lambda^2 + CX\Lambda + KX = 0, M, C, K \in ACSR^{n\times n}\}$ 是问题 Ⅰ 的解集合.

## 2　问题Ⅰ的解

首先讨论中心斜对称矩阵 $ACSR^{n\times n}$ 的结构.

令 $k = [\frac{n}{2}]$, $[x]$ 是不大于 $x$ 的最大整数.

当 $n = 2k$ 时,

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_k & I_k \\ S_k & -S_k \end{bmatrix}, \qquad D^T D = I_n. \tag{1}$$

当 $n = 2k + 1$ 时,

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_k & 0 & I_k \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ S_k & 0 & -S_k \end{bmatrix}, \qquad D^T D = I_n. \tag{2}$$

**引理 1**[3]　不论 $n$ 是奇数还是偶数, $ACSR^{n\times n}$ 中的元素的一般形式为

$$A = D \begin{bmatrix} 0 & G \\ H & 0 \end{bmatrix} D^T, \qquad G \in R^{(n-k)\times k}, H \in R^{k\times (n-k)}.$$

这里当 $n = 2k$ 时, $D$ 取(1) 式, 当 $n = 2k + 1$ 时, $D$ 取(2) 式.

为研究问题 Ⅰ 的解的存在性及其解的结构, 先考虑下面更一般的问题:

问题 Ⅰ′　给定 $X, Y, Z, N \in R^{n\times m}$, 求 $A, B, C \in ACSR^{n\times n}$ 使得

$$AX+BY+CZ=N. \tag{3}$$

设$\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}$的秩为$r$且有如下的奇异值分解:

$$\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=U\begin{bmatrix}\Sigma&0\\0&0\end{bmatrix}V^T, \tag{4}$$

其中$U=[U_1,U_2]\in OR^{3n\times 3n}$, $U_1\in R^{3n\times r}$, $V=[V_1,V_2]\in OR^{m\times m}$, $V_1\in R^{m\times r}$, $\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)$, $\sigma_i>0, i=1,2,\cdots,r$, 从(4)有

$$\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}^+=V\begin{bmatrix}\Sigma^{-1}&0\\0&0\end{bmatrix}U^T=V_1\Sigma^{-1}U_1^T.$$

引理 2[5] 给定$X,Y,Z,N\in R^{n\times m}$, 设$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=r$, 若$\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}$的奇异值分解为式(4), 则问题Ⅰ′有解的充要条件是$NV_2=0$. 在(4)有解的情况下, 其通解为

$$[A,B,C]=N\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}^++GU_2^T,\quad \forall G\in R^{n\times(3n-r)}.$$

**定理 1** 给定$X,Y,Z,N\in R^{n\times m}$, 令

$$D^TX=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix},\quad D^TY=\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\end{bmatrix},\quad D^TZ=\begin{bmatrix}Z_1\\Z_2\end{bmatrix},\quad D^TN=\begin{bmatrix}N_1\\N_2\end{bmatrix}, \tag{5}$$

其中$X_1,Y_1,Z_1,N_1\in R^{(n-k)\times m}$, $X_2,Y_2,Z_2,N_2\in R^{k\times m}$. 设$\begin{bmatrix}X_i\\Y_i\\Z_i\end{bmatrix}$的秩为$r_i$且有如下奇异值分解

$$\begin{bmatrix}X_i\\Y_i\\Z_i\end{bmatrix}=U_i\begin{bmatrix}\Sigma_i&0\\0&0\end{bmatrix}V_i^T,\quad i=1,2, \tag{6}$$

其中$\Sigma_i=\mathrm{diag}\{\sigma_{i1},\sigma_{i2},\cdots,\sigma_{ir_i}\}$, $\sigma_{ij}>0, j=1,2,\cdots,r_i, i=1,2$; $U_1=[U_{11},U_{12}]\in OR^{3(n-k)\times 3(n-k)}$, $U_{11}\in R^{3(n-k)\times r_1}$, $U_2=[U_{21},U_{22}]\in R^{3k\times 3k}$, $V_i=[V_{i1},V_{i2}]\in OR^{m\times m}$, $V_{i1}\in R^{m\times r_i}$, $i=1,2$. 则问题Ⅰ′有解的充分必要条件是

$$N_1V_{22}=0 \text{ 且 } N_2V_{12}=0.$$

在有解的情况下, 问题Ⅰ′的中心斜对称解$A,B,C$分别为

$$A=D\begin{bmatrix}0&A_1\\A_2&0\end{bmatrix}D^T,\quad B=D\begin{bmatrix}0&B_1\\B_2&0\end{bmatrix}D^T,\quad C=D\begin{bmatrix}0&C_1\\C_2&0\end{bmatrix}D^T, \tag{7}$$

其中

$$[A_1,B_1,C_1]=N_1\begin{bmatrix}X_2\\Y_2\\Z_2\end{bmatrix}^++G_1U_{22}^T,\qquad \forall G_1\in R^{(n-k)\times(3k-r_2)}, \tag{8}$$

$$[A_2,B_2,C_2]=N_2\begin{bmatrix}X_1\\Y_1\\Z_1\end{bmatrix}^++G_2U_{12}^T,\qquad \forall G_2\in R^{k\times(3(n-k)-r_1)}. \tag{9}$$

证明 由引理 1, $A,B,C\in \mathrm{ASC}R^{n\times n}$可表示为

$$A=D\begin{bmatrix}0&A_1\\A_2&0\end{bmatrix}D^T,\quad B=D\begin{bmatrix}0&B_1\\B_2&0\end{bmatrix}D^T,\quad C=D\begin{bmatrix}0&C_1\\C_2&0\end{bmatrix}D^T,$$

其中$A_2, B_2, C_2 \in R^{k\times(n-k)}$. 当$n=2k$时,$A_1, B_1, C_1 \in R^{k\times k}$, 当$n=2k+1$时,$A_1, B_1, C_1 \in R^{(k+1)\times k}$, 从而有

$$D\begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} D^T X + D\begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{bmatrix} D^T Y + D\begin{bmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} D^T Z = N, \tag{10}$$

即

$$A_1 X_2 + B_1 Y_2 + C_1 Z_2 = N_1, \quad A_2 X_1 + B_2 Y_1 + C_2 Z_1 = N_2. \tag{11}$$

所以问题Ⅰ'有解的充分必要条件是方程(11)有解$[A_i, B_i, C_i]$ $(i=1,2)$. 由引理2知方程(11)有解当且仅当$N_1 V_{22}=0$且$N_2 V_{12}=0$. 并且在(11)有解的情况下, 其通解为(8), (9).

定理1表明问题Ⅰ总有解, 形式的推导可证明其解的结构如下.

**定理2** 给定$X \in R^{n\times m}$, $\Lambda \in R^{m\times m}$, 记

$$D^T X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

其中$X_1 \in R^{(n-k)\times m}$, $X_2 \in R^{k\times m}$. 设$\begin{bmatrix} X_i\Lambda^2 \\ X_i\Lambda \\ X_i \end{bmatrix}$的秩为$r_i$且有如下的奇异值分解:

$$\begin{bmatrix} X_i\Lambda^2 \\ X_i\Lambda \\ X_i \end{bmatrix} = U_i \begin{bmatrix} \Sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_i^T, \quad i=1,2, \tag{13}$$

其中$\Sigma_i = \mathrm{diag}\{\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \cdots, \sigma_{ir_i}\}$, $\sigma_{ij}>0$, $j=1,2,\cdots,r_i$, $i=1,2$. 设$U_1=[U_{11}, U_{12}] \in OR^{3(n-k)\times 3(n-k)}$, $U_{11} \in R^{3(n-k)\times r_1}$, $U_2=[U_{21}, U_{22}] \in R^{3k\times 3k}$, $V_i=[V_{i1}, V_{i2}] \in OR^{m\times m}$, $V_{i1} \in R^{m\times r_i}$, 则问题Ⅰ的解$M, C, K \in \mathrm{ASC}R^{n\times n}$存在, 且其通解为

$$[M, C, K] = D\begin{bmatrix} 0 & G_1 U_{22}^T \\ G_2 U_{12}^T & 0 \end{bmatrix} P^T \begin{bmatrix} D^T & 0 & 0 \\ 0 & D^T & 0 \\ 0 & 0 & D^T \end{bmatrix}. \tag{14}$$

其中$G_1 \in R^{(n-k)\times(3k-r_2)}$, $G_2 \in R^{k\times(3(n-k)-r_1)}$是任意的,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I_k & 0 & 0 \\ I_{n-k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_k \\ 0 & 0 & I_{n-k} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

现给出求解问题Ⅰ的数值算法.

**算法1** 1. 对给定$X$, 将$D^T X$按式(12)进行分块;

2. 作$\begin{bmatrix} X_i\Lambda^2 \\ X_i\Lambda \\ X_i \end{bmatrix}$的奇异值分解式(13);

3. 由式(14), 计算$M, C, K$.

## 3 问题Ⅱ的解

因为问题Ⅰ的解集合$S_{MCK}$非空且是完备内积空间$R^{n\times 3n}$中的一个闭凸集, 据内积空间的变分原理, $[\tilde{M}, \tilde{C}, \tilde{K}]$在$S_{MCK}$中有惟一的最佳逼近$[\hat{M}, \hat{C}, \hat{K}]$.

对给定的$\tilde{M}, \tilde{C}, \tilde{K} \in R^{n\times n}$, 记

$$D^T[\tilde{M}, \tilde{C}, \tilde{K}]\begin{bmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

定理3 给定 $\tilde{M},\tilde{C},\tilde{K}\in R^{n\times n}$ 和 $\Lambda\in R^{m\times m}$,则问题 II 存在惟一解,并且其解可表示为

$$[\hat{M},\hat{C},\hat{K}] = D\begin{bmatrix} 0 & \tilde{A}_{12}G_1U_{22}^T \\ \tilde{A}_{21}G_2U_{12}^T & 0 \end{bmatrix} P^T\begin{bmatrix} D^T & 0 & 0 \\ 0 & D^T & 0 \\ 0 & 0 & D^T \end{bmatrix}. \tag{16}$$

证明 对任意 $[M,C,K]\in S_{MCK}$,有

$$[M,C,K] = D\begin{bmatrix} 0 & G_1U_{22}^T \\ G_2U_{12}^T & 0 \end{bmatrix} P^T\begin{bmatrix} D^T & 0 & 0 \\ 0 & D^T & 0 \\ 0 & 0 & D^T \end{bmatrix}, \tag{17}$$

则

$$[\tilde{M},\tilde{C},\tilde{K}] - [M,C,K] = [\tilde{M},\tilde{C},\tilde{K}] - D\begin{bmatrix} 0 & G_1U_{22}^T \\ G_2U_{12}^T & 0 \end{bmatrix} P^T\begin{bmatrix} D^T & 0 & 0 \\ 0 & D^T & 0 \\ 0 & 0 & D^T \end{bmatrix} =$$

$$D\left\{\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & G_1U_{22}^T \\ G_2U_{12}^T & 0 \end{bmatrix}\right\} P^T\begin{bmatrix} D^T & 0 & 0 \\ 0 & D^T & 0 \\ 0 & 0 & D^T \end{bmatrix}.$$

由范数Frobenius的酉不变性,有

$$\|[\tilde{M},\tilde{C},\tilde{K}] - [M,C,K]\|^2 = \left\|\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} - G_1U_{22}^T \\ \tilde{A}_{21} - G_2U_{12}^T & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}\right\|^2 =$$

$$\|\tilde{A}_{12} - G_1U_{22}^T\|^2 + \|\tilde{A}_{21} - G_2U_{12}^T\|^2 + \sum_{i=1}^{2}\|\tilde{A}_{ii}\|^2.$$

显然当 $G_1 = \tilde{A}_{12}U_{22}, G_2 = \tilde{A}_{21}U_{12}$ 时, $\|[\tilde{M},\tilde{C},\tilde{K}] - [M,C,K]\|$ 达到最小值. 由式(17) 得到式(16).

现给出求解问题 II 的数值算法:

算法2 1. 对给定 $X$, 将 $D^TX$ 的按式(12) 进行分块;

2. 作 $\begin{bmatrix} X_i\Lambda^2 \\ X_i\Lambda \\ X_i \end{bmatrix}$ 的奇异值分解式(13);

3. 对给定的 $\tilde{M},\tilde{C},\tilde{K}$, 由式(15) 计算 $\tilde{A}_{12},\tilde{A}_{21}$;

4. 由式(16) 计算 $\hat{M},\hat{C},\hat{K}$.

## 参考文献:

[1] Mottershead J E, Friswell M I. Model updating in structural dynamics: a survey[J]. Juna. of Sound & Vibration, 1993(167): 347-375.

[2] 陈景良, 陈向晖. 特殊矩阵 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2001.

[3] 周富照, 胡锡炎, 张磊. 反中心对称问题存在的条件 [J]. 系统科学与数学, 2003, 23 (3): 328-336.

[4] 王亭, 周富照. 流线形上反中心对称的最佳逼近 [J]. 湖南师范大学自然科学学报, 2004, 27 (2): 38-41.

[5] 戴华. 一类二次特征值反问题 [J]. 南京大学学报数学半年刊, 1988, 5 (1): 132-140.

(责任编辑: 林 敏)